

Eesti koolinoorte LV täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 8. jaanuaril 2008. a.
XII klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Missuguse parameetri a väärtuse korral on paraboolide $f(x) = x^2 + 3x + 4$ ja $g(x) = x^2 - x + a$ lõikepunktis nendele paraboolidele tõmmatud puutujate vaheline nurk $\frac{\pi}{4}$?
2. Geomeetrilise jada esimene, teine ja 2008. liige on naturaalarvud. Tõesta, et jada 2007. liige on samuti naturaalarv.
3. Lahenda logaritm võrrand $3 + \frac{1}{\log_{32} \frac{x}{2}} = \log_{\frac{x}{2}} \left(17x - \frac{4}{x} \right)$.
4. Ühikringi on joonestatud kõõlud $AB = \sqrt{2}$ ja $BC = \frac{10}{7}$. Leia nurga ABC sisepiirkonda jääva ringi osa pindala, kui on teada, et nurk BAC on teravnurk.
5. 2008 kaaluvihti on asetatud ritta. On teada, et suvalise kahe naabervihi massid erinevad täpselt 1 grammi võrra. Tõesta, et kaaluvihid saab jaotada kahele kangkaalu kausile nii, et mõlemal kausil oleks 1004 kaaluvihti ja kangkaal oleks tasakaalus.